

10.31653/smf50.2025.5-14

Богач В.М., Довиденко Ю.М. Обертюр К.Л.

Національний університет "Одеська морська академія"

ЗАКОНОМІРНОСТІ РУХУ ПЛІВКИ МАСТИЛА ПО ДЗЕРКАЛУ ЦИЛІНДРА

Кількісне дослідження будь-якого фізичного явища включає такі основні етапи: експериментальне вивчення фізичного механізму; побудову фізичної та математичної моделей; вибір методу та розв'язання рівнянь математичної моделі.

Результат рішення представляється у вигляді функціональних співвідношень, що дають кількісний опис досліджуваного явища.

Часто складність явища перешкоджає побудові коректної та повної математичної моделі. Вирішення цієї проблеми зазвичай ведеться у двох напрямках. Насамперед складне явище замінюють «ідеальним», або «елементарним», процесом. Інша можливість обходу виникаючих труднощів полягає у заміні складного різноманіття взаємопов'язаних процесів їх ідеалізованими аналогами з коректним математичним описом. Для цієї мети постулюють можливість застосування фізичних законів за певних ідеалізованих умов, або із залученням додаткових гіпотез.

Одними з найважливіших є процеси, що відбуваються в стікаючих плівках рідини. Їх характеристики залежать від параметрів течії і докорінно відрізняються для різних гідродинамічних режимів (ламінарного, хвильового, турбулентного). Зокрема, це є наслідком поверхневих явищ, що змінюють тип течії (забруднення поверхнево-активними речовинами, динамічна взаємодія з газовою фазою).

Плівковий тип течії по суті є рідиною, що стікає по гладкій твердій поверхні під дією сили тяжіння. Товщина плівки завжди виявляється значно менше її ширини, і, отже, такий плин рідини можна розглядати як двовимірний. Те саме справедливо для випадку, коли плівка стікає вниз по викривленій поверхні за умови, що радіус кривизни набагато більше товщини плівки. Двовимірність течії дозволяє розглядати плівки одиничної ширини. Витрата рідини у такій плівці визначається співвідношенням ваги рідини, її в'язкості та сил, що діють на поверхні розділу газ – рідина.

Кількісний опис такої течії вважається вичерпним, якщо визначено компоненти вектора швидкості, тиск рідини і товщина плівки.

Ці характеристики можуть бути отримані за допомогою рішення основних рівнянь механіки суцільних середовищ, що включають рівняння перенесення імпульсу, нерозривності та макроскопічного балансу.

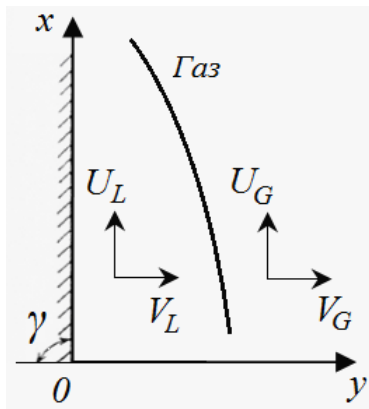


Рис. 1. Фізична модель

Математичний опис стікаючих плівок ґрунтується на фізичній моделі, зображеній на рис.1.

Плівка стікає вниз по твердій поверхні $y=0$, і математична модель течії задається системою диференціальних рівнянь, що зв'язують компоненти вектора швидкості u і v , тиск p і товщину h . Будемо вивчати плин ньютонівської рідини. У цьому випадку основними рівняннями, що описують течію, є рівняння Нав'є - Стокса, рівняння нерозривності та рівняння макроскопічного балансу [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g \sin \gamma, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g \cos \gamma, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy = 0. \quad (4)$$

тут ρ - щільність рідини, ν - її кінематична в'язкість, g - прискорення сили тяжіння і γ - кут нахилу поверхні до горизонту. Далі вивчати- мемо вертикальні плівки ($\gamma = 90^\circ$). Умови однозначності рішення системи (1) - (4) представлені чотирнадцятьма початковими та граничними умовами. Оскільки розглядатимуться лише стаціонарні чи стійкі періодичні течії, три початкові умови для u , v і h стають непотрібними. Те ж саме можна сказати про одну з граничних умов для

тиску p , оскільки розподіл p в повздовжньому напрямку завжди визначається з точністю до довільної постійної.

Оскільки довжина плівки значно більша, ніж її товщина ($l > h$), істотно важливі лише асимптотичні рішення при $x \rightarrow \infty$ і, таким чином, граничні умови по повздовжній координаті стають непотрібними. Крім того, зазначена особливість рідких плівок призводить до спрощення системи визначальних рівнянь (1) - (4). Отже, для вирішення завдання потрібно задати лише чотири граничні умови. Вони висловлюють умову «прилипання» на твердій стінці $y=0$ та умови рівноваги сил на міжфазній поверхні газ-рідина.

$$y = 0, \quad u = v = 0, \quad (5)$$

$$y = h, \quad p_{nL} = p_{\sigma} + p_{nG}, \quad p_{\tau L} = p_{\tau G}, \quad (6)$$

$$u_{nG} = u_{nL}, \quad u_{\tau G} = u_{\tau L},$$

де:

$$p_{nL} = -p - 2\mu \frac{1-h'^2}{1+h'^2} \frac{\partial u_L}{\partial x} - 2\mu \frac{h'}{1+h'^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$p_{\sigma} = \frac{\sigma h''}{(1+h'^2)^{3/2}},$$

$$p_{\tau L} = \mu \frac{1-h'^2}{1+h'^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 4\mu \frac{h'}{1+h'^2} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Верхній штрих тут і всюди далі означає диференціювання по x , нижній індекс G - приналежність до газової фази, L - до рідкої, σ - коефіцієнт поверхневого натягу рідини, p_n і p_{τ} - нормальна і дотична компоненти тензора напружень на міжфазній поверхні, а p_{σ} - капілярний тиск.

Експериментальні дослідження різних авторів свідчать про те, що для рідких плівок можливі три основні режими течії: ламінарний, хвильовий і турбулентний. Однак ця класифікація не зовсім точна, і режими слід швидше назвати ламінарним безхвильовим, неламінарним хвильовим і турбулентним. Області існування цих трьох основних режимів течії визначаються за допомогою критичних значень числа Рейнольдса:

$$Re = Q / \nu,$$

де Q - об'ємна витрата рідини, що припадає на одиницю ширини плівки.

Ламінарний режим плинущ спостерігається при дуже низьких числах Рейнольдса ($Re \leq 2$) [2]. Він може існувати при витратах, менших, ніж деяке критичне значення, що залежить від властивостей рідини (поверхневого натягу, в'язкості), властивостей твердої підкладки (її шорсткості), наявності поверхнево-активних речовин і т. п.

Безхвильова течія плівки малов'язких рідин може бути реалізована тільки після гідрофілізації твердої поверхні. Якщо підстилаюча тверда поверхня є полірованою то гідрофілізацію, що забезпечує добру змочуваність, можна зробити обробкою поверхні за допомогою деяких лужних агентів. Після такої обробки може бути експериментально реалізована течія з гранично низькими числами Рейнольдса нижче 0,5.

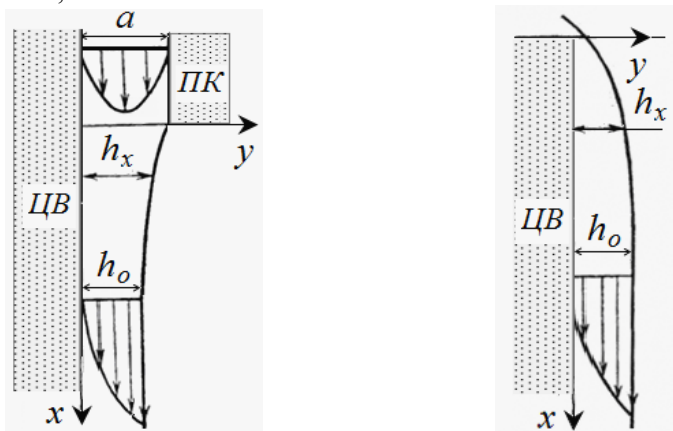


Рис.2. Типи розподільвачів рідини:

а) подача через вузьку щілину; б) подача переливом

Хвильові режими по суті також є ламінарними і для них характерно, що хвилі поширюються вздовж плівки з фазовою швидкістю, що перевищує швидкість частинок рідини на поверхні. Встановлено, що з $Re > Re_{cr}$ хвилі з'являються на поверхні плівки лише на певній відстані від розподільника рідини, яку зазвичай називають *лінією початку хвилі*.

Довжина початкової безхвильової області залежить від конструкції розподільного пристрою (рис.2) і наявності поверхнево-активних речовин. Вона зменшується зі зростанням числа Рейнольдса. Наявність забруднень із поверхнево-активними властивостями, навпаки, збільшує цю область.

Експериментальні результати [3, 6] свідчать про те, що безхвильові плівки спостерігаються аж до $Re = 6$. Значенням $Re_{cr} = 2$ може бути при недостатній довжині досліджуваних плівок, або при наявності слідів ПАР в рідині.

Ймовірно, причиною появи збурень, що призводять до розвитку системи хвиль на поверхні плівки, є сингулярна точка в місці виходу плівки з розподільника рис.2(а): у цій точці здійснюється перехід від режиму течії між двома паралельними твердими стінками до вільної поверхні.

Вважається, що верхньою межею за кількістю Рейнольдса для режиму хвильового течії є значення $Re = 250$. Однак експерименти підтверджують, що перехід до турбулентного режиму відбувається в діапазоні $250 < Re_{cr} < 500$. Це може бути пояснено недоліком суто гідродинамічного критерію переходу до турбулентного режиму або перехідною природою та властивостями поверхні хвиль.

Іноді для визначення критичного числа Рейнольдса використовують експериментальні дані з масопереносу в рідких плівках. Проте слід прийняти, що перехідний режим, безперечно, існує. Режим плівки слід розглядати як турбулентний при $Re > 500$.

Ламінарний плин плівки є по суті таким, що встановився, оскільки на її поверхні відсутні хвилі. Така течія може існувати протягом усієї довжини плівки (при досить малих числах Рейнольдса) або тільки на початковій ділянці. Математична модель цієї течії виходить із рівнянь (1) - (6) за умови, що

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

Для вирішення гідродинамічної задачі необхідно сформулювати дві граничні умови за координатою x . Перше (при $x=0$), як це випливає з рис.2, залежить від конструкції вхідного розподільного пристрою.

Взагалі кажучи, прийнято розглядати два граничні випадки: однорідний вхідний профіль швидкості рис.2(б) або параболічний рис.2(а). Обидва типи умов можна записати у наступному вигляді:

$$x = 0, \quad u = u_0, \quad v = 0, \quad p = \text{const}, \quad h = h_0, \quad (8)$$

де: $u_0 = \text{const}$ або $u_0 = u_0(y)$.

Друга гранична умова виставляється на кінці плівки. Воно залежить від способу видалення рідини із поверхні. Оскільки зазвичай

довжина плівки l значно перевершує її товщину h , цю граничну умову зазвичай формують при $x \rightarrow \infty$.

Щоправда, такий розгляд не може бути наслідком апіорної фізичної передумови, а дає лише асимптотичне розв'язання задачі (1)-(6) при $x \rightarrow \infty$. Реально можна використовувати граничну умову $x = l$, але це не підвищить практичної цінності рішення.

Течія ламінарної плівки залежить від різних факторів, пов'язаних як з об'ємними (кут нахилу твердої стінки, в'язкість рідини), так і з поверхневими динамічними впливами (рух прилеглого газу, поверхнева пружність, пов'язана з адсорбцією ПАР).

Поверхня стікаючої рідкої плівки практично вільна від напружень, якщо немає динамічної взаємодії (або вона досить мала) з газом і якщо поверхневий натяг сталий уздовж всієї довжини плівки.

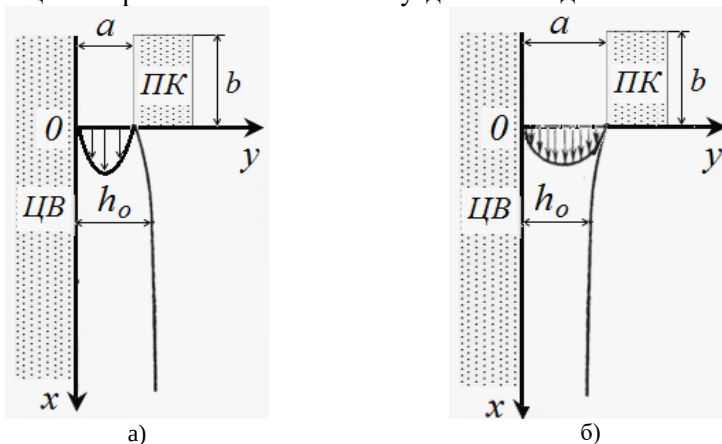


Рис.3. Типи вхідних профілей швидкості у СДВЗ

У цьому випадку гранична умова істотно спрощується внаслідок того, що:

$$p_{nG} = 0, \quad p_{\tau G} = 0. \quad (9)$$

Рух плівки з вільною поверхнею зображений на рис.3(а). Мастило проходить через щілину шириною a , і залежно від витрати Q , конструкції розподільника й довжини щілини b можуть бути реалізовані різні варіанти вхідного профілю швидкості плівки [4]. При $b > 0,08aRe$ реалізується розвинений параболічний профіль рис. 3(а), (б).

При досить довгих плівках ($l \geq h$), розподіл швидкості виходить як рішення задачі (1)-(6) із граничною умовою (8) і з урахуванням співвідношень (7) і (9). Спочатку сформульована задача представляється в безрозмірному вигляді за допомогою наступних змінних:

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{l_0}, \quad Y = \frac{y}{h_0}, \quad U = \frac{u}{\bar{u}}, \quad V = \frac{v}{\varepsilon_0 \bar{u}}, \\ P &= \frac{p}{\rho \bar{u}^2}, \quad H = \frac{h}{h_0}, \quad \varepsilon_0 = \frac{h_0}{l_0}. \end{aligned} \quad (10)$$

Тут h_0 і $\bar{u} = Q / h_0$ позначають середню товщину плівки й середню по поперечному перерізі плівки швидкість рідини.

Підстановка співвідношень (7), (9) і (10) у вихідні рівняння (1)...(6) призводить до наступного крайового рівняння, сформульованого в безрозмірних змінних:

$$\varepsilon_0 \left(U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \varepsilon_0 \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{1}{Fr} + \frac{1}{Re} \left(\varepsilon_0^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right), \quad (11)$$

$$\varepsilon_0^2 \left(U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \frac{\partial P}{\partial Y} = \frac{\varepsilon_0}{Re} \left(\varepsilon_0^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right), \quad (12)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (13)$$

$$H' = (V / U)_{Y=H}, \quad (14)$$

$$Y = 0, \quad U = V = 0, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} Y = H, \quad P + \frac{\varepsilon_0^2 H''}{We(1 + \varepsilon_0^2 H'^2)^{3/2}} + \frac{2\varepsilon_0}{Re} \frac{1 - \varepsilon_0^2 H'^2}{1 + \varepsilon_0^2 H'^2} \frac{\partial U}{\partial X} \\ + \frac{2\varepsilon_0}{Re} \frac{H'}{1 + \varepsilon_0^2 H'^2} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \varepsilon_0^2 \frac{\partial V}{\partial X} \right) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$Y = H, \quad \frac{\partial U}{\partial Y} + \varepsilon_0^2 \frac{\partial V}{\partial X} - \varepsilon_0^2 \frac{4H'}{1 - \varepsilon_0^2 H'^2} \frac{\partial U}{\partial X} = 0, \quad (17)$$

де: Re , Fr і We – числа Рейнольдса, Фруда і Вебера відповідно:

$$Re = \frac{\bar{u} h_0}{\nu} = \frac{Q}{\nu}, \quad Fr = \frac{\bar{u}^2}{gh_0}, \quad We = \frac{\rho \bar{u}^2 h_0}{\sigma}.$$

Вирішення задачі можна одержати, додаючи до зазначеної системи рівнянь граничні умови при $X=0$ і $X \rightarrow \infty$. Останнє можна уточнити, вирішуючи систему (11)...(17) у нульовому наближенні по ε_0 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} &= -\frac{\text{Re}}{\text{Fr}}, \quad \frac{\partial P}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \\ Y &= 0, \quad U = V = 0, \\ Y &= H, \quad P = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = 0, \quad H'U - V = 0.\end{aligned}$$

Це рішення виписується безпосередньо:

$$U = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}}(Y - Y^2/2), \quad V \equiv 0, \quad P \equiv 0, \quad H \equiv 1. \quad (18)$$

Рівняння (18) справедливе при $X \rightarrow \infty$. Цей профіль швидкості був вперше отриманий Нуссельтом за допомогою пошарового балансу гравітаційних та в'язкісних сил у припущенні постійної товщини плівки. Отриманий результат показує, що рішення Нуссельта є асимптотичним для плівки з вільною поверхнею і що сталість товщини плівки впливає з істинного рішення. Товщина плівки та відношення «поверхнева швидкість/середня швидкість рідини» можуть бути обчислені за витратою:

$$h_0 = \left(\frac{3\nu^2 \text{Re}}{g} \right)^{1/3}, \quad \frac{u_s}{\bar{u}} = \frac{3}{2}.$$

Чисельне рішення системи (11)...(17) показало, що рівняння (18) справедливо, якщо $l_0 \geq \text{Re}h_0$. Експериментальна перевірка цих результатів зазвичай здійснюється виміром поверхневої швидкості, профілю швидкості й товщини плівки. Отримані результати свідчать про задовільне узгодження теоретичних та експериментальних даних [1, 5].

За даними [2, 7] матеріал стінки та її шорсткість не мають істотного впливу на товщину плівки. Проте деякі експерименти [4] вказують на існування залежності товщини плівки від глибини шорсткості. Робилися навіть спроби теоретичного обчислення дотичних напружень за цих умов [6].

Розв'язання задачі (11) - (17) для області $0 \leq x \leq l_0$ може бути також отримано чисельно у наближенні прикордонного шару ($\varepsilon \neq 0$,

$\varepsilon_0^2=0$). Результати показують, що профіль швидкості залежить від відношення a_0/h_0 , і при $x > 100h_0$ досягається профіль Нуссельта.

У деяких теоретичних роботах [2, 3] показано, що швидкість рідини на поверхні при $x < l_0$ не залежить по суті від члена $\partial^2 u / \partial x^2$. Цей висновок підтверджується експериментальними даними для випадку $a=h_0$.

Як відмічалось раніше [6] ламінарний рух плівки звичайно асоціюється з існуванням на поверхні плівки дотичних напружень, що викликані динамічним впливом прилеглої газової фази. При відсутності вимушеного руху газу ці напруження зазвичай не беруться до уваги. Вимушений рух газу істотно впливає на рух плівки. Цей вплив зазвичай враховується в граничній умові рівноваги сил на поверхні газ-рідина (6) через величини p_{nG} і $p_{\tau G}$:

$$p_{nG} = -p_G - 2\mu_G \frac{1-h'^2}{1+h'^2} \frac{\partial u_G}{\partial x} - 2\mu_G \frac{h'}{1+h'^2} \left(\frac{\partial u_G}{\partial y} + \frac{\partial v_G}{\partial x} \right),$$

$$p_{\tau G} = \mu_G \frac{1-h'^2}{1+h'^2} \left(\frac{\partial u_G}{\partial y} + \frac{\partial v_G}{\partial x} \right) - 4\mu_G \frac{h'}{1+h'^2} \frac{\partial u_G}{\partial x}.$$

Цікавим представляється розгляд одночасного руху рідкої плівки мастила й газового потоку в тому випадку, коли останній є турбулентним. Очевидно, що режим руху в одному напрямку характеризується більш слабкою залежністю перепаду тиску від числа Рейнольдса, ніж режим зустрічного руху.

З іншого боку, рух в одному напрямку, очевидно, робить стабілізаційний вплив на двофазний рух. У цьому випадку перепад тиску починає зростати при деякому досить високому значенні числа Рейнольдса. У випадку ж зустрічного руху різке зростання перепаду тиску при певному значенні Re_L призводить в результаті до явища "захливання". Критичне значення Re_G , що відповідає режиму "захливання", зменшується зі зростанням Re_L .

Варто пам'ятати, що наведені характеристики руху рідини, не залишаються такими ж для інших умов руху – іншої геометрії, ширини зазору й т.п. Хоча ясно, що при помірних числах Рейнольдса перепад тиску буде доволі малим як у випадку однакового і зустрічного напрямків руху мастила і газів.

Ця особливість робить перспективу практичного застосування двофазного газо-рідинного плівкового руху досить привабливою, особливо у випадку однакового напрямку, коли проявляється стабілізаційний ефект.

Висновки

Розглянуто хвильові ламінарні режими руху рідини для яких характерно поширення хвиль вздовж плівки з фазовою швидкістю, що перевищує швидкість частинок рідини на поверхні.

Встановлено, що кількість мастила в плівці, що стікає по дзеркалу циліндра під дією сили тяжіння, визначається співвідношенням його ваги, в'язкості й сил, що діють на поверхні розділу газ-рідина.

Отримані аналітичні залежності вказують на той факт, що вимушений рух газу істотно впливає на рух плівки, при цьому однаковий напрямок руху газу й мастила (період руху поршня до н.м.т.) робить на двофазний рух стабілізаційний вплив.

Приведені результати досліджень свідчать про задовільне узгодження теоретичних та експериментальних даних.

Перелік використаних джерел

1. Гусак О. Г., Шарапов С. О., Ратушний О. В. Гідрогазодинаміка: навчальний посібник / Суми: Сумський державний університет. 2022. 296 с.

2. Богач В.М., Парменова Д.Г., Обертюр К.Л. Математична модель руху мастила по дзеркалу циліндра // Суднові енергетичні установки. Вип. 48. Одеса: НУ «ОМА», 2024. С.5-17.

3. Богач В.М. Підвищення ефективності суднових дизелів шляхом удосконалення лубрикаторних систем: Монографія. Одеса: НУ «ОМА», 2020. 294 с.

4. Богач В.М., Довіденко Ю.М., Дуранов О.П. Особливості роботи лубрикаторних систем суднових довгоходових двигунів // Суднові енергетичні установки. Вип. 44. Одеса: НУ «ОМА», 2022. С. 53-63.

5. Богач В.М., Шебанов А.М., Довіденко Ю.М., Єлінський І.Е. Вплив газу на рух мастила по дзеркалу циліндра // Суднові енергетичні установки. Вип. 43. Одеса: НУ «ОМА», 2021. С.126-139.

6. Вамболь С.О., Міщенко І.В., Кондратенко О.М. Технічна механіка рідини і газу: підручник. Харків: НУЦЗУ, 2016. 300 с.

7. Дяченко В.Г. Двигуни внутрішнього згоряння. за ред. А. П. Марченка. Харків: НТУ "ХПІ", 2008. 488 с.